

학 사 학 위 논 문

강한 양자전기역학과 P-N 접합에서 유사 현상
Strong QED and Analogy in P-N Junction

송 도 현

한 양 대 학 교

2025년 8월

학 사 학 위 논 문

강한 양자전기역학과 P-N 접합에서 유사 현상
Strong QED and Analogy in P-N Junction

지도교수 윤 용 성

이 논문을 이학 학사학위논문으로 제출합니다.

2025년 8월

한 양 대 학 교

물 리 학 과

송 도 현

초록

본 논문에서는 고에너지물리학과 응집물질물리학 사이의 대응 관계를 조명한다. 특히, 강한 외부 전자기장이 진공에 가해졌을 때, 전자-양전자 쌍이 생성되는 슈윙거 현상과 P-N 접합에 임계 전압 이상의 역방향 전압이 가해졌을 때 전류가 흐르는 제너 항복 현상의 유사성을 비교한다. 적절한 대응 관계를 통하여, 제너 항복 현상을 슈윙거 현상으로 이해할 수 있음을 보였다. 절대 영도에서와 유한 온도의 상황을 구분하여 분석함으로써, 온도에 따른 밴드갭의 변화가 전류밀도에 미치는 영향을 정량적으로 제시하였다. 이를 통해, 응집물질 계에서 고에너지물리학의 비섭동론적 현상을 간접적으로 검증할 수 있는 가능성을 제안하며, 두 분야간의 이론적 연결 고리를 제공하고자 한다.

차례

| | |
|------------------------------------|----|
| 초록 | 4 |
| I. 서론 | 6 |
| II. 강한 외부 전기장하에서의 쌍생성 | 6 |
| IIA. WKB 근사와 터널링 확률 진폭 | 7 |
| IIB. 유한 온도에서 쌍생성률 밀도 | 8 |
| III. P-N 접합과 항복 현상 | 9 |
| IV. P-N 접합 내에서의 쌍생성 | 10 |
| IVA. 절대 영도에서 P-N 접합에서의 전류 밀도 | 11 |
| IVB. 유한 온도에서 P-N 접합에서의 전류 밀도 | 12 |
| V. 결론 | 14 |
| 감사의 글 | 15 |
| 참고문헌 | 16 |

I. 서론

외부의 강한 전자기장 하에서 진공의 비 안정성에 의해 발생하는 하전 입자의 쌍생성은 오랜 세월에 걸쳐 연구되어왔다. 하이젠베르크(Heisenberg)와 오일러(Euler)는 외부 전자기장 하에서 유효 작용(effective action)에 대하여 연구하였고[1], 슈윙거(Schwinger)는 로렌츠 공변 하는 양자 전기역학 (Lorentz covariant Quantum Electrodynamics)를 개발함과 동시에 강한 세기의 일정한 전기장이 외부에서 작용할 때 전자-양전자 쌍생성률 밀도 (electron-positron pair production per unit time per unit volume)을 계산하였다[2]. 이러한 외부 전자기장 하에서의 쌍생성 현상은 소위 슈윙거 효과로 불리우며, 시간 의존 전기장 (예를 들어, Sauter type field)에 대한 쌍생성률 혹은 자기장에 의한 효과 등이 연구 되고 있다[3].

쌍생성을 예측하고 생성률이 계산 된 지 80여년이 지났지만, 슈윙거 효과에 대한 직접적인 실험 관측은 이루어지지 않았다. 슈윙거의 계산에 따르면 상수 전기장의 세기가 임계 전기장 세기

$E_c = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} (\sim 10^{18} [V/m])$ 이상 일 때 쌍생성을 관측할 수 있다. 임계 전기장의 세기의 구현

불가능성이 현재까지 슈윙거 효과를 관측하지 못한 직접적인 이유이다.

한편 고체의 내부와 같은 원자-전자 상호작용이 존재하는 시스템 내에서 전자는 자유 전자와 다른 물리 양상을 보인다. 특히 주기적인 퍼텐셜에 의하여 전자가 취할 수 있는 에너지 레벨이 제한되며 띠 구조 (band structure)로서 나타나게 된다. 고체 내부에서의 전자의 동역학을 유효 질량(effective mass)를 도입하여 단순화 시켜 다룰 수 있고, 유효 질량의 값은 고체의 물성에 따라 달라지게 된다.

본 논문에서는 P-N 접합(P-N junction)과 같은 반도체(semi-conductor) 접합 구조에서 역 전압(reverse bias)를 가해주었을 때 전류가 흐르는 현상을 슈윙거 효과의 결과로 생각하여 분석해보고자 한다. 또한 온도가 0[K]에서의 상황과 유한 온도에서의 상황을 비교하고, 온도가 T인 P-N 접합에서 역 전류(reverse current)의 온도 의존성을 측정 가능한 물리량과 함께 제시하고자 한다.

II. 강한 일정 외부 전기장 하에서의 쌍생성

쌍생성은 진공 상태(vacuum state)에서 다-입자 상태(multi-particle state)로의 전이 과정으로 고려된다. 쌍생성률 밀도의 정확한 계산을 위해서는 양자전기역학이 필수적이며, 비섭동론적 현상이기 때문에 까다로운 계산이 존재한다. 이러한 계산 대신 양자역학 수준에서의 이해를 진행해보고자 한다. 외부 전기장은 계에 가해지는 퍼텐셜로 나타나고, 슈윙거 효과는 전자 파동함수의 디랙의 바다로부터 퍼텐셜을 통과하여 실제화 되는 양자 터널링으로서 이해된다. 허용된 영역에서 금지된 영역(forbidden region)을 통과 할 확률 진폭은 WKB(Wentzel-Kramers-Brillouin) 근사로 계산할 수 있다.

A. WKB 근사와 터널링 확률 진폭

계산의 단순화를 위해 일차원 계(1-dimensional system)을 생각한다. x축 방향으로 세기가 E_0 로 일정한 전기장이 주어졌다고 하자. 이때 전기 퍼텐셜은 $-E_0x$ 으로 주어지고, 전자와 양전자의 정지 질량 에너지를 고려하면 퍼텐셜 에너지는 식 (1)과 같이 주어진다.

$$V_{\pm}(x) = m_e c^2 \mp eE_0 x \quad (x > 0) \quad (1)$$

여기서 e 는 전자의 전하량, m_e 는 전자의 질량이고 +는 양전자, -는 전자에 대한 퍼텐셜이다. 그림 I는 우리가 고려하는 상황을 묘사하고 있다.

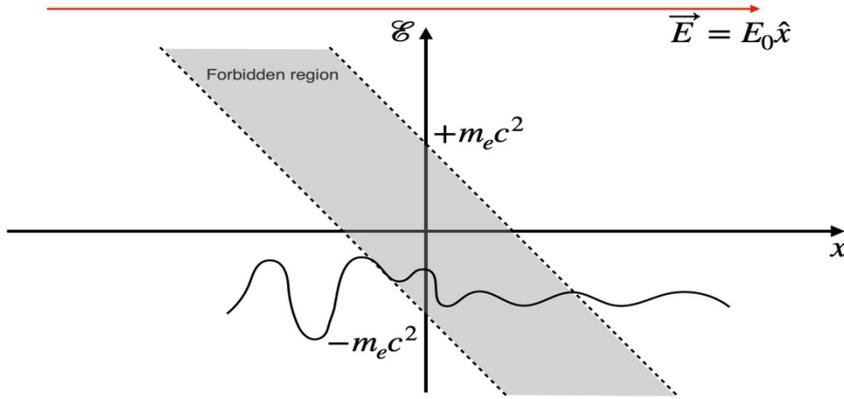


그림 I. WKB approximation

자유공간에서 전자에게 허용된 영역은 정지질량 에너지 $m_e c^2$ 에 대하여 $\pm m_e c^2$ 이상-이하의 영역이다. 외부 전기장이 가해지면서 허용된 영역과 금지된 영역이 그림과 같이 변하게 된다. 우리가 고려하는 현상은 좌측 영역으로부터 우측 영역으로의 터널링이 된다.

WKB 근사에서 터널링 계수 T 는 $\exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_0^{x_0} dx \sqrt{2m(V(x) - E)}\right]$ 로 주어진다. 이때 적분은 금지된 영역에 대해서 수행되고, x_0 는 쌍생성을 위해 필요한 최소한의 거리이다. 외부 장으로부터 받는 에너지는 $|eE_0 x_0| + |-eE_0 x_0| = 2E_0 x_0$ 이고, 쌍생성을 위해서는 $2m_e c^2$ 이상의 에너지가 필요하므로, 쌍생성을 위해 필요한 최소한의 거리 x_0 는 $\frac{m_e c^2}{eE_0}$ 로 주어진다. 상대론적 입자에 대해서, 초기 에너지 $E=0$ 인 상태의 터널링 계수의 피적분함수 $\sqrt{2m(V(x))}$ 가 $\sqrt{V(x) \left(2m - \frac{V(x)}{c^2}\right)}$ 로 변경된다[5]. 따라서 터널링 계수 T 는 식 (2)로 주어진다.

$$T = \exp\left[-\frac{4}{\hbar} \int_0^{x_0} dx \sqrt{(m_e c^2 - eE_0 x)(m_e c^2 + eE_0 x)}\right] = \exp\left(-\frac{m_e^2 c^3}{\hbar e E_0}\right). \quad (2)$$

단위 체적당 단위 시간당 쌍생성 입자수(쌍생성률 밀도)는 터널링 계수에 비례하여 주어지게 된다. 이때 임계 전기장 E_c 는 $\frac{m_e^2 c^3}{e\hbar}$ 로 주어지고 약 $1.3 \times 10^{18} [V/m]$ 의 값을 가진다.

양자전기역학을 통한 쌍생성률 밀도 Γ 는 상호작용 라그랑지안밀도 $L_I(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$ 에 대해서 진공-진공 확률 진폭(“vacuum to vacuum probability amplitude” or “vacuum

persistence”)를 계산함으로써 얻을 수 있다. 이렇게 주어지는 쌍생성률 밀도 Γ 는 식 (3)과 같다.

$$\Gamma = \frac{e^2 E_0^2}{4\hbar^2 \pi^3 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{nm_e^2 c^3}{\hbar e E_0}\right). \quad (3)$$

B. 유한 온도에서 쌍생성률 밀도

위에서 고려한 현상은 열적인 효과를 무시하였었다. 이제 유한 온도 T 에서 계가 열적 평형 상태에 있을 때, 쌍생성을 생각해보자. 즉, 생성되는 입자 쌍이 온도를 변화시키지 않는 계를 고려한다. 열적 여기(Thermal excitation)에 의해 전자와 양전자는 4-운동량(4-momentum)이 변하기 때문에, 특정 운동량을 가지는 입자 쌍이 몇 개 생성 되었는지가 중요하다. 일반성을 잃지 않고, 외부 전기장이 일정한 세기 E_0 를 가지고 z -방향으로 향한다고 가정하자. $T = 0[K]$ 에서 파수 벡터(wave-number vector) \vec{k} 를 가지는 생성된 입자 쌍의 평균 개수(the mean number of produced pair at each wave-number vector \vec{k} at $T = 0$) $\mathcal{N}_{\vec{k},\omega}$ 는 $e^{i(\omega-\omega')k_z/eE_0} e^{-\frac{\pi(m^2 c^3 + ch^2 \vec{k}_\perp^2)}{eE_0 \hbar}}$ 로 주어지고, 쌍생성률 밀도 Γ 는 파수 벡터 공간 전체에서의 적분으로 주어진다.[7]

$$\Gamma = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i(\omega-\omega')k_z/eE_0} e^{-\frac{\pi(m^2 c^3 + ch^2 \vec{k}_\perp^2)}{eE_0 \hbar}} \quad (4)$$

계가 $0[K]$ 이상의 온도 T 에서 열적 평형 상태에 있을 때, 세 가지의 가능한 전이 과정을 고려해야 한다. 첫 번째 과정은 진공에서 다입자 상태로의 전이 과정이다. 이는 $T = 0[K]$ 인 경우와 동일한 과정이고, 전자-양전자 쌍은 동일한 에너지, 반대 방향의 운동량 벡터 상태를 점유하게 된다. 두 번째 과정은 전자와 양전자의 열적 여기 과정이다. 각각 독립적인 여기가 가능하며, 서로 다른 4-운동량 상태를 점유 가능하다. 마지막은 자극-소멸(Stimulated Annihilation) 과정이다. 열적 여기로 인해 들뜬 상태에 있는 전자 혹은 양전자 상태는 쌍생성된 새로운 양전자 혹은 전자와 쌍소멸이 가능하다. 세 가지의 과정을 고려한, 파수 벡터 \vec{k} 를 가지는 생성된 입자 쌍의 평균 개수 $\mathcal{N}_{\vec{k},\omega}(T)$ 는 다음과 같이 주어진다[8].

$$\mathcal{N}_{\vec{k},\omega}(T) = \mathcal{N}_{\vec{k},\omega}(T = 0) \times (1 - 2f_F(\hbar\omega; T)) \quad (5)$$

여기서 $f_F(E; T)$ 는 페르미-디랙 분포이다. 따라서, 온도 T 에서의 쌍생성률 밀도 $\Gamma(T)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\Gamma(T) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{\frac{i(\omega-\omega')k_z}{eE_0}} e^{-\frac{\pi(m^2 c^3 + ch^2 \vec{k}_\perp^2)}{eE_0 \hbar}} (1 - 2f_F(\hbar\omega; T)) \quad (6)$$

특히, 온도 T 가 임계 온도 $T_c = \sqrt{\frac{eE_0 \hbar c}{4\pi k_B^2}}$ 보다 작은 경우(슈윙거 효과의 임계 전기장 세기 $E_c =$

¹ ω 는 운동량 벡터 \vec{k} 로부터 전자의 분산관계를 만족 시키는 진동수로, $(\hbar\omega)^2 = (m_e c^2)^2 + (\hbar\vec{k}c)^2$ 로 결정된다.

$\frac{m_e^2 c^3}{e\hbar}$ 에 대해서, 임계 온도 T_c 는 약 1.65×10^9 [K]이다), 다음과 같이 근사 하는 것이 가능하다.

$$\Gamma(T) \approx \Gamma_0 - g(T; E_0, 2m_e c^2) \times \exp\left(-\frac{\pi m_e^2 c^3}{e E_0 \hbar}\right) \exp\left(-\frac{m_e c^2}{k_B T}\right) . \quad (7)$$

여기서 Γ_0 는 식 (3)에서 계산 된 0[K]에서의 쌍생성률 밀도 이고, $g(T; E_0, m_e)$ 는 $g(T; E_0, m_e c^2) := \frac{e^2 E_0^2}{2\pi^2 \hbar^2 c} \times \frac{m_e c^2 k_B T}{e E_0 \hbar c + 2\pi m_e c^2 k_B T}$ 로 정의되는 온도에 의존하는 함수로 $\frac{1}{(\text{volume}) \times (\text{time})}$ 차원을 가진다.

III. P-N 접합과 항복 현상

P-N 접합은 p-유형 반도체와(p-type semi-conductor)와 n-유형 반도체(n-type semi-conductor)를 접합 시킨 형태로, p-유형의 운반자(carrier)인 양공(hole)과 n-유형의 운반자인 전자가 접합부에서 재결합(re-combine)되며 운반자가 사라진 공핍 영역(Depletion Region)을 형성하고 있다. 공핍 영역에서 에너지 밴드의 기울기(gradient)가 내부 전기장을 형성하고, 운반자들의 이동을 억제하게 되면서 평형 상태에 도달하게 된다. 그림 II는 외부 전압이 가해지지 않은 상황에서 P-N 접합의 에너지 밴드 다이어그램을 나타내고 있다.

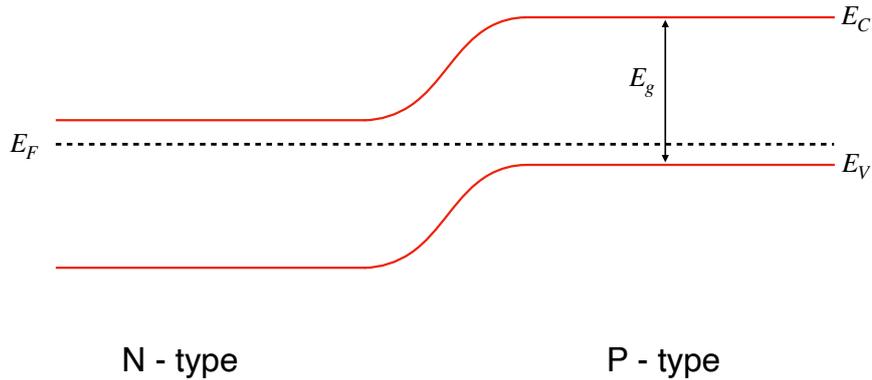


그림 II. 외부 전압이 없을 때, P-N 접합의 에너지 밴드

외부 순방향 전압(Forward Bias)을 걸어주게 되면, 에너지 밴드의 기울기가 줄어들게 되고, 운반자들의 이동을 촉진시키게 되면서 전류를 생성하게 된다. 외부 역방향 전압(Reverse Bias)을 가해주는 경우 에너지 밴드 기울기가 더욱 가파르게 변하고, 운반자들의 이동을 더욱 억제하게 된다.

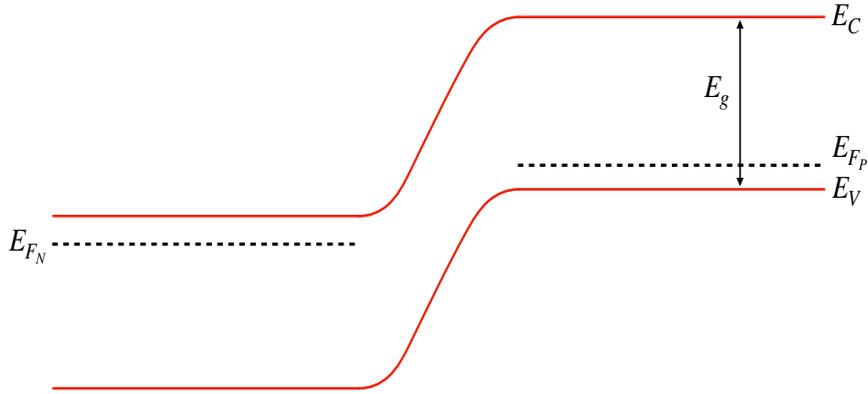


그림 III. 역방향 전압이 걸렸을 때, P-N 접합의 에너지 밴드

이때 외부 전기장의 세기가 임계 전기장을 넘어가게 되면 P-유형 반도체의 가전도대로부터 N-유형 반도체의 전도대로의 양자 터널링이 발생하게 되고, 이로 인한 터널링 전류가 존재하게 된다. 이러한 터널링 전류는 ‘제너 터널링 전류’(Zener tunneling current)라는 이름으로 알려져 있고, 역방향 전압에서 임계 전기장을 넘어가는 전기장 하에서 전류가 흐르는 현상은 제너 항복(Zener Breakdown)이라 불리고 있다[5]. 케인(Kane)은 2-band 모델을 적용하여 터널링 전류를 계산하였고[6], 전류 밀도 $J_{tun.}$ 은 식 (4)와 같이 주어진다.

$$J_{tun.} = \frac{eF^2 m_r^{\frac{1}{2}} w}{18\pi \hbar^2 E_G} \exp\left(-\frac{\pi m_r^{\frac{1}{2}} E_G^{\frac{3}{2}}}{2\hbar F}\right). \quad (8)$$

여기서 F 는 전자에 작용하는 힘의 세기, m_r 은 전자-양공의 환산 질량, w 는 전기장에 평행한 방향의 접합의 길이(longitudinal length of junction), 그리고 E_G 는 가전도대와 전도대 사이 에너지 간격이다.

IV. P-N 접합 내에서의 쌍생성

강한 외부 전기장에 의한 쌍생성은 진공 상태가 전자-양전자 쌍의 정지 질량에 의한 에너지 차이 $\Delta = 2m_e c^2$ 을 넘어 다-입자 상태로 전이하는 과정이다. 이때 에너지 차이 Δ 는 쌍생성률 밀도 Γ 를 결정하는 중요한 파라미터가 된다. 쌍생성률 밀도 Γ 를 $c = \sqrt{\frac{\Delta}{2m_e}}$ 를 대입하여 Δ 에 대하여 작성하면 식 (9)와 같다.

$$\Gamma = \frac{e^2 E_0^2}{4\hbar^2 \pi^3} \sqrt{\frac{2m_e}{\Delta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi}{\hbar e E_0} \sqrt{\frac{m_e \Delta^3}{8}}\right). \quad (9)$$

A. 절대 영도에서 P-N 접합에서의 전류 밀도

이제 P-N 접합 내부에서 그림 IV와 같은 과정을 고려하자.

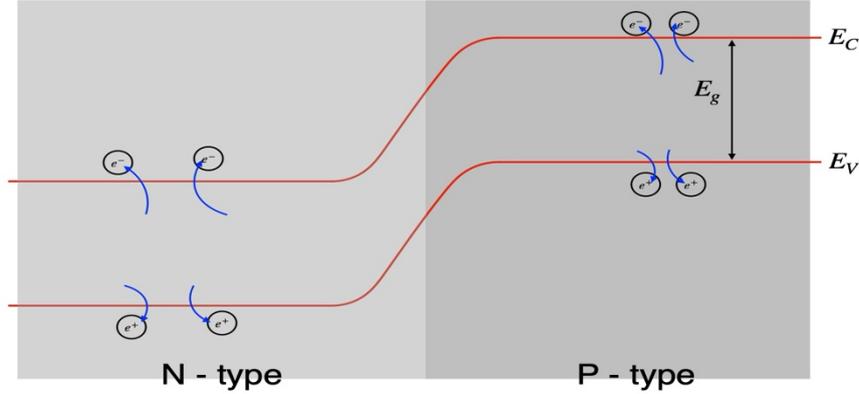


그림 IV. P-N 접합 내의 쌍생성 과정 모식도

계산의 편의성을 위해 P-유형 반도체와 N-유형 반도체는 동일한 반도체에 서로 다른 불순물을 첨가하였다고 하자. 즉, 두 유형의 반도체 모두 밴드갭 에너지 E_G 는 동일하다. 외부의 전기장이 에너지원으로 작용하여, E_G 이상의 에너지를 공급하게 되면 가전도대에서 전도대로 전이가 발생하게 된다. 생성된 전자와 양전자는 전기장에 의해 서로 반대 방향으로 가속되고, 이로 인한 전류가 발생하게 된다.

슈윙거 효과와 유사하게 생각하기 위해 다음의 대응관계를 생각해본다. 먼저 에너지 장벽 Δ 은 밴드 갭 에너지(Band Gap) E_G 에 대응된다고 하자. 제너 항복 현상은 가전도대에서 전도대로의 전이에 의한 전류 생성이므로 유의미한 대응 관계가 된다. 다음은 전자 질량 m_e 의 대응관계이다. 진공에서 전자와 양전자는 P-N 접합 내부의 전자와 양공으로 대응된다. P-N 접합 내부의 전자와 양공은 주변 원자 계와의 상호작용이 존재하기 때문에 유효 질량 $m_{e,eff}, m_{h,eff}$ 을 사용하는 것이 유용하다. 진공에서 전자와 양전자는 질량이 같고 전하가 다른 입자이지만, 고체 내부에서의 상호작용에 의해 전자와 양공의 유효 질량은 서로 다르게 나타난다. 한편, 전이 과정에서는 전자와 양공의 ‘상대 운동’(relative motion)만이 중요하기에, 환산 질량(reduced mass) m_r 을 도입한다. 환산 질량 m_r 은 다음과 같이 정의 된다.

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_{e,eff}} + \frac{1}{m_{h,eff}} . \quad (10)$$

특히, 진공에서의 전자-양전자의 환산질량 $m_{r,vac}$ 는 전자 질량의 절반 $\frac{m_e}{2}$ 이다. 진공에서의 쌍생성률 밀도 Γ_{vac} 를 환산질량으로 작성하면 다음과 같다.

$$\Gamma_{vac} = \frac{e^2 E_0^2}{2\hbar^2 \pi^3} \sqrt{\frac{m_{r,vac}}{\Delta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi}{2\hbar e E_0} \sqrt{m_{r,vac} \Delta^3}\right) . \quad (11)$$

위의 대응 관계 하에서, P-N 접합에서의 쌍생성률 밀도 Γ_{pn} 를 작성하면 다음과 같다.

$$\Gamma_{pn} = \frac{e^2 E_0^2}{2\hbar^2 \pi^3} \sqrt{\frac{m_r}{E_g}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi}{2\hbar e E_0} \sqrt{m_r E_g^3}\right). \quad (12)$$

전기장에 평행한 방향의 길이가 L 인 접합에 대해서, 전류 밀도 J_{pn} 은 다음과 같다.

$$J_{pn} = e\Gamma_{pn}L = \frac{e^3 E_0^2 L}{2\hbar^2 \pi^3} \sqrt{\frac{m_r}{E_g}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi}{2\hbar e E_0} \sqrt{m_r E_g^3}\right). \quad (13)$$

급수의 1차 근사에서 케인의 터널링 전류 밀도, 식 (8)과 일치하는 결과를 얻을 수 있다.

B. 유한 온도에서 P-N 접합에서의 전류 밀도

본문 II-B 에서 유한 온도에서 슈윙거 효과를 다루었고, IV-A 에서는 밴드갭과 질량의 대응 관계를 통하여 P-N 접합에서의 전류를 슈윙거 효과로 해석 할 수 있음을 확인하였다. 따라서 유한 온도의 계에 대해서도 동일한 대응 관계를 적용하여, P-N 접합의 전류 밀도를 유도할 수 있다.

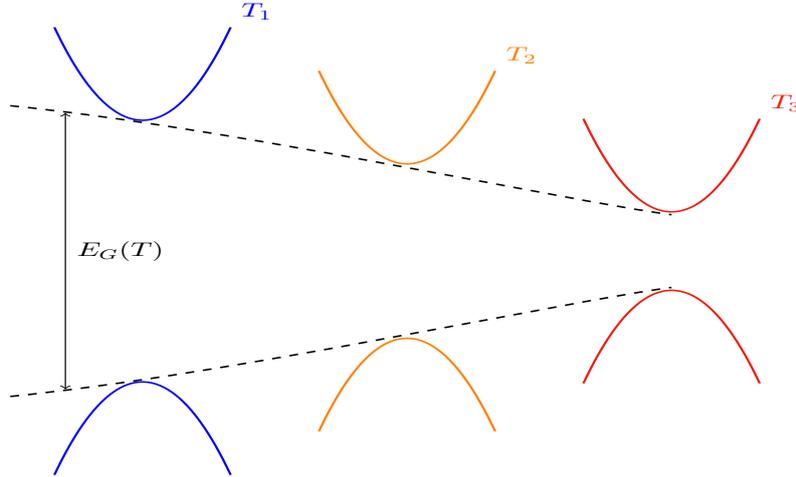


그림 V. 밴드갭의 온도에 따른 변화

먼저 반도체의 밴드갭의 온도 의존성에 대해 고려해보자. 온도 T 에서의 전도대와 가전도대를 각각 $E_{cond}(T), E_{val}(T)$ 라 하자. $0[K]$ 에서 고체 내부의 원자 진동은 존재하지 않지만, 온도 T 가 증가함에 따라 진동이 심화 되고, 전자가 점유할 수 있는 에너지 준위에 영향을 미치게 된다. 고체 내부의 진동을 준-입자(quasi-particle) 포논(phonon)으로 간주하고, 전자-포논 상호작용으로 인하여 포논의 에너지가 전자로 전달되는 과정을 고려하자. 가전도대에 존재하는 전자들은 산란으로 더 높은 에너지를 가질 수 있게 되고, 전도대의 전자는 포논과의 산란으로 에너지를 손실하여 더 낮은 준위를 취할 수 있다. 따라서, 에너지 준위의 온도 의존성은 포논의 평균 에너지 $\langle E_{phonon} \rangle$ 에 의하여 조절 된다고 가정할 수 있다. 즉, $E_{cond(val)}(T) = E_{cond(val)}(\langle E_{phonon} \rangle)$ 이라 가정하고, $\langle E_{phonon} \rangle$ 에 대한 섭동을 취해주면, 1차 보정은 다음과 같다.

$$E_{cond(val)}(T) = E_{cond(val)}(T = 0) + a_1(a_2) \times \langle E_{phonon} \rangle . \quad (14)$$

여기서 $a_1(a_2)$ 는 각각 $\frac{\partial E_{cond(val)}}{\partial \langle E_{phonon} \rangle} |_{\langle E_{phonon} \rangle = 0}$ 으로 정의되는 상수이다. 특히, 전도대의 에너지 준위는 상승하고 가전도대의 에너지 준위는 감소하므로, $a_1 < 0$ 와 $a_2 > 0$ 가 된다. 여기에서, $T = 0$ 일 때 포논의 평균 에너지를 영점으로 설정하였다. 우리의 관심사는 절대적인 에너지가 아닌, 온도가 변화에 따른 포논의 효과 이므로, 이미 존재하는 포논의 효과는 무시하는 것이 타당하다.

따라서 밴드갭 $E_G(T)$ 의 온도 의존성은 다음과 같이 작성 할 수 있다..

$$E_G(T) = E_G(T = 0) - \gamma \langle E_{phonon} \rangle . \quad (15)$$

한편, 포논의 평균 에너지 $\langle E_{phonon} \rangle$ 은 단위 입자 당 고체의 내부 에너지와 같다. 우리의 주된 관심사는 상온 이상의 온도이고, 계산의 편의성을 위해 포논의 단일 모드를 가정한다. 포논의 진동수 ω_0 에 대해서, 포논의 평균 에너지 $\langle E_{phonon} \rangle$ 는 다음과 같다.

$$\langle E_{phonon} \rangle = \frac{3\hbar\omega_0}{e^{\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}} - 1} . \quad (16)$$

ω_0 는 실험을 통해 결정된다.

특히 $k_B T \ll \hbar\omega_0$ 에 대해서, 포논의 평균 에너지는 식 (17)과 같이 작성할 수 있다.

$$\langle E_{phonon} \rangle = \frac{3k_B T^2}{T + \frac{\hbar\omega_0}{2k_B}} . \quad (17)$$

따라서 $T > 0$ 인 계에서, 밴드갭 $E_G(T)$ 는 $T = 0$ 일 때에 비해 감소하게 된다.

$$E_G(T) = E_G(0) - \frac{AT^2}{T+B} . \quad (18)$$

여기서 $A = 3k_B\gamma$, $B = \frac{\hbar\omega_0}{2k_B}$ 로 실험으로 결정된다.

먼저 II-B 에서 논하였던 쌍생성률 밀도의 변화를 고려하자. 진공에서 온도 T 에서의 쌍생성률 밀도는 온도 $0[K]$ 에 비해 $g(T; E_0, m_e c^2) \times \exp\left(-\frac{\pi m_e^2 c^3}{e E_0 \hbar}\right) \exp\left(-\frac{m_e c^2}{k_B T}\right)$ 만큼 감소하게 된다. IV-A 에서 논하였던 진공에서 P-N 접합으로의 대응관계를 적용하면, 온도 T 의 P-N 접합에서의 쌍생성률 밀도 $\Gamma_{pn}(T)$ 는 다음과 같다.

$$\Gamma_{pn}(T) \approx \Gamma_{pn}(T; E_G)|_{T=0} - g(T; E_0, E_G) \times \exp\left(-\frac{\pi}{2eE_0\hbar} \sqrt{m_r E_G^3}\right) \exp\left(-\frac{E_G}{k_B T}\right) . \quad (19)$$

여기서 $g(T; E_0, E_G) = \frac{e^2 E_0^2}{2\pi^2 \hbar^2} \times \frac{\sqrt{m_r E_G}}{\sqrt{m_r E_G k_B T + e E_0 \hbar}}$ 이고, $\Gamma_{pn}(T; E_G)|_{T=0}$ 는 온도 $T = 0[K]$ 에서의 쌍생성률 밀도를 나타내고, 밴드갭 E_G 의 온도 의존성이 고려되지 않은 값으로 식 (12) 와 동일하다.

이제 밴드갭의 온도 의존성을 고려하여 쌍생성률 밀도가 얼마나 강화 되는지 확인하자. 식

(19)의 밴드갭 E_G 를 $E_G(T)$ 로 대체하여, 식 (18)을 대입한다. 계산의 단순화를 위해 우변의 첫 번째 항 $\Gamma_{pn}(T; E_G(T))|_{T=0}$ 에서 급수의 지배적인 항, $n=1$ 만을 취하도록 하고, 포논의 평균 에너지가 $0[K]$ 에서의 밴드갭 $E_G(0)$ 보다 작다고 가정한다. 수정된 $\Gamma_{pn}(T)$ 를 $\Gamma_{pn}(0)$ 를 통해 나타내면 다음과 같다..

$$\Gamma_{pn}(T) \approx \Gamma_{pn}(0) \times \left(1 + \frac{AT^2}{2E_G(0)(T+B)}\right) \exp\left(\frac{\pi\sqrt{m_r E_G(0)^3}}{4eE_0\hbar} \frac{3AT^2}{E_G(0)(T+B)}\right) - G(T; E_0) . \quad (20)$$

여기서 $G(T; E_0)$ 는 다음과 같이 정의되는 함수 이다.

$$G(T; E_0) = g(T; E_0, E_G(T)) \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{m_r E_G(0)^3}}{2eE_0\hbar} \left(1 - \frac{3AT^2}{2E_G(0)(T+B)}\right)\right) \exp\left[-\frac{E_G(0)}{k_B T} \left(1 - \frac{AT^2}{E_G(0)(T+B)}\right)\right]. \quad (21)$$

따라서, 온도 T 에서 길이가 L 인 P-N 접합에 일정한 세기 E_0 의 전기장이 가해질 때 발생하는 전류 밀도 $J_{pn}(T)$ 는 다음과 같다.

$$J_{pn}(T) = e\Gamma_{pn}(T)L = J_{pn}(0) \left(1 + \frac{AT^2}{2E_G(0)(T+B)}\right) \exp\left(\frac{\pi\sqrt{m_r E_G(0)^3}}{4eE_0\hbar} \frac{3AT^2}{E_G(0)(T+B)}\right) - eG(T; E_0)L . \quad (22)$$

V. 결론

본 논문에서는 P-N 접합에 강한 역전압을 가해주었을 때 생성되는 전류밀도를 양자장론의 슈윙거 쌍생성과의 대응 관계를 통하여 해석하고자 하였다. 이를 위하여, 고체 내 밴드 구조와 유효 질량 개념을 고에너지물리학에서의 질량 장벽과 연결하였고, 매개변수 변환을 통하여 두 현상이 본질적으로 유사함을 보였다. 극저온 환경에서 슈윙거 쌍생성률 밀도를 기반으로, 전기장 하에서 PN접합에 발생하는 전류밀도를 정량적으로 제시하였고, 양자역학적 터널링으로 해석하였던 Kane의 결과와 일치함을 확인하였다. 또한 유한 온도 환경에서는 열적 요동과 점유 상태의 변화로 인해 생성률과 전류밀도가 수정됨을 보였다. 열적 여기와 자극 소멸 효과를 고려하여, 생성률 밀도의 수정을 제시하였고, 포논 평균에너지에 따른 밴드갭의 온도 의존성을 정량적으로 도입함으로써, 고체 내에서의 전류 밀도를 양자장론적 결과로서 제시하였다.

이러한 대응 관계는 응집물질물리학과 고에너지물리학 사이의 연결이 가능하다는 것을 시사하며, 응집물질에 대한 새로운 개념적 틀을 제시한다. 더 나아가, 반도체 계가 강한 양자전기역학 현상을 간접적으로 관찰할 수 있는 계임을 시사한다. 이를 통하여, 구현 불가능이라는 벽에 막혀 있던 고에너지물리학 현상을 응집물질물리학의 계로 대응한다면, 간접적인 검증을 거칠 수 있을 것이다. 특히, 고에너지물리학에서 예측되었으나, 아직 검증되지 않은 초대칭성(Supersymmetry)이나 액시온(Axion)과 같은 현상들에 대하여, 이론간의 정합적인 대응관계를 설정함으로써, 응집물질물리학 계에서의 간접적인 탐색 가능성을 제안한다.

참고 문헌

- [1] W. Heisenberg and H. Euler, "Consequences of Dirac's theory of positrons," Z.Phys, 98, 714 (1936).
- [2] J. Schwinger, "On gauge invariance and vacuum polarization," Phys. Rev. 82, 664 (1951).
- [3] F. Sauter, "Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs," Zeit. f. Phys. 69, 742 (1931)
- [4] A. R. Brown, "Brane tunneling and virtual brane-antibrane pairs," PoS CARGESE 2007, 022 (2007)
- [5] S. P. Kim, H. K. Lee and Y. Yoon, "Effective action of QED in electric field backgrounds," Phys. Rev. D 78, 10513 (2008)
- [6] S. P. Kim, H. K. Lee and Y. Yoon, "Schwinger pair production at finite temperature in QED," Phys. Rev. D 79, 0450254 (2009)
- [7] C. Zener, "A theory of the electrical breakdown of solid dielectrics," Proc. R. Soc. London, Ser. A 145, 523 (1934)
- [8] E. O. Kane, "Zener tunneling in semiconductors," J. Phys. Chem. Solids 12, 181 (1960)